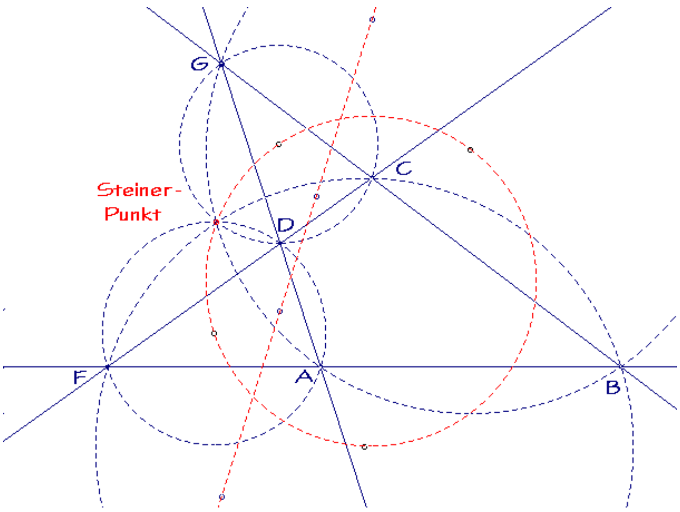
Steiner-Geometrie des Sehnen-Vierecks

Eckart Schmidt

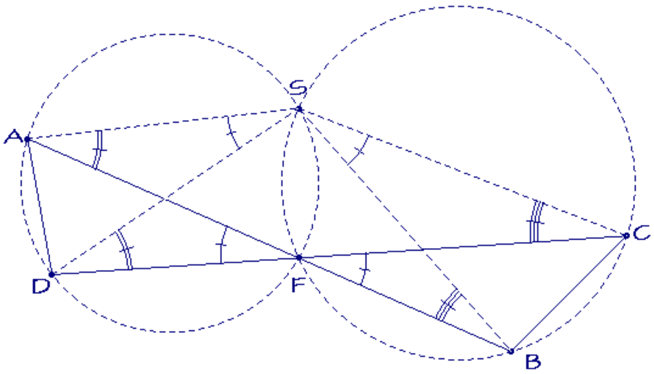
Zu einem Viereck lässt sich das vollständige Vierseit der Seitengeraden sowie der zugehörige Steiner-Punkt (Miquel point) als gemeinsamer Punkt der Umkreise der Teildreiseite betrachten. Die Mittelpunkte dieser Umkreise liegen mit dem Steiner-Punkt konzyklisch; der zugehörige Kreis (circumcentric circle) sei hier als Steiner-Kreis bezeichnet. Weiterhin liegen die Höhenschnitte der Teildreiseite auf einer Geraden (orthocentric line), hier als Steiner-Gerade angesprochen. Zu zahlreichen weiteren geometrischen Zusammenhängen sei auf Beiträge von Clawson [1] und Ehrmann [2] hingewiesen, die sich ausführlich mit Steiners 1828 veröffentlichten zehn Sätzen über das vollständige Vierseit beschäftigen. Im Folgenden werden Steiner-Punkt, -Gerade und -Kreis für Sehnen-Vierecke untersucht. Dabei wird eine Inversion benutzt, die die Gegenecken des Vierecks vertauscht und ihr Zentrum im Steiner-Punkt hat [3]. Analytische Berechnungen erfolgen ergänzend in kartesischen Koordinaten.



Die Vierecks-Inversion

$ABCD$ sei ein Viereck in allgemeiner Lage mit Diagonalenschnitt E und Gegenseitenschnitten F und G. Gesucht ist eine Inversion, bestehend aus Kreisspiegelung und Spiegelung an einer Durchmessergeraden, die die Gegenecken A und C als auch B und D vertauscht. Die Umkreise der Dreiecke ADF und BCF schneiden sich im Steiner-Punkt S. Mit Scheitel- und Umfangswinkelgleichheit ergibt sich

$$\angle ASD = \angle AFD = \angle BFC = \angle BSC .$$



Somit haben die Winkel $\angle ASC$ und $\angle DSB$ die gleiche Winkelhalbierende. Mit der Umfangswinkelgleichheit ergibt sich weiterhin die Ähnlichkeit der Dreiecke

$$\Delta\, ABS \approx \Delta\, DCS \;,$$

die daher durch eine Drehstreckung aufeinander abgebildet werden können. Streckungsfaktor ist

$$\frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} \text{ , und es gilt } SA \cdot SC = SB \cdot SD \,.$$

Damit ist der Steiner-Punkt *S* des Vierecks *ABCD* Zentrum einer Inversion, die nicht nur die Gegenecken, sondern nach entsprechenden Überlegungen auch die Schnittpunkte *F* und *G* der Gegenseiten vertauscht [3]. Diese Inversion wird in abgewandelter Form schon von Clawson ([1], S.247) benutzt. Für den Radius *s* des Inversionskreises lässt sich zeigen

$$SA \cdot SC = SB \cdot SD = \frac{r_{AB} \cdot r_{BC} \cdot r_{CD} \cdot r_{DA}}{\rho^2} = s^2 \,.$$

Dabei bezeichne ρ den Radius des Steiner-Kreises und r_{AB} den Umkreisradius des Teildreiseits zur Seite *AB*.

Hier seien einige Eigenschaften dieser Vierecks-Inversion ohne Beweis angegeben:

(1) ... vertauscht nicht nur die Gegenecken, sondern auch die Gegenseitenschnitte *F* und *G* sowie den Diagonalenschnitt *E* mit dem Tangentialpunkt *T* des Vierecks. Diesen von Stärk [4] ausführlich untersuchten merkwürdigen Punkt des Vierecks erhält man, wenn man eine Ecke isogonal bzgl. des Restdreiecks abbildet und dann am Umkreis des Restdreiecks spiegelt. Der Tangentialpunkt liegt im zweiten Schnittpunkt der Kreise durch den Steiner-Punkt und ein Gegeneckenpaar.

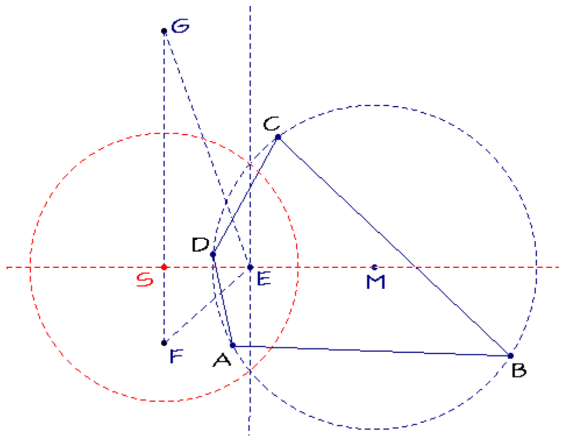
(2) ... bildet die Seitengeraden *AB*, *BC*, *CD*, *DA* auf die Umkreise der Teildreiseite *CDG*, *DAF*, *ABG*, *BCF* ab.

(3) ... bildet die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiseite auf die Spiegelpunkte des Steinerpunktes *S* an den Seitengeraden ab.

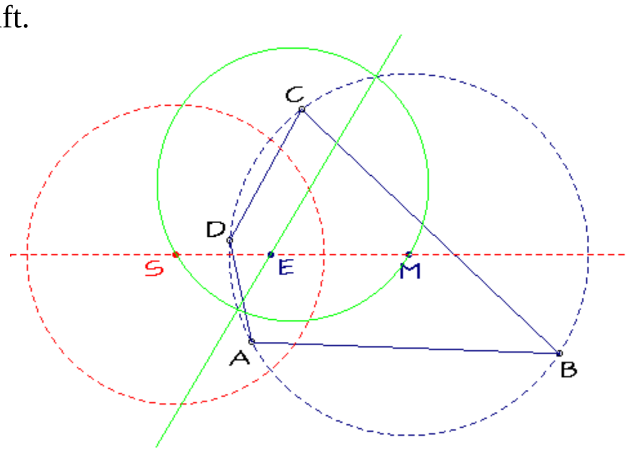
(4) ... bildet den Steiner-Kreis auf die Steiner-Gerade ab – wohl die bemerkenswerteste Eigenschaft.

Der Steiner-Punkt eines Sehnen-Vierrecks

Für ein Sehnen-Viereck fällt der Tangentialpunkt in die Umkreismitte *M*. Der Umkreis ist Fixkreis der Virecks-Inversion. Er schneidet den Inversionskreis daher orthogonal und die Umkreismitte *M* liegt auf der Inversionsachse. Spiegelt man die Umkreismitte *M* als Tangentialpunkt am Inversionskreis, so erhält man den Diagonalenschnitt *E* ebenfalls auf der Inversionsachse im Schnitt mit der gemeinsamen Sehne.



Da sich Inversionskreis und Umkreis orthogonal schneiden und der Diagonalenschnitt auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte im Schnitt mit der gemeinsamen Sehne liegt, muss entsprechend die Spiegelung des Steiner-Punktes *S* am Umkreis den Diagonalenschnitt *E* ergeben. Damit liegt *S* auf der Polaren von *E* bzgl. des Umkreises, d.h. auf der Basis *FG* des Diagonaldreiecks, die senkrecht zur Inversionsachse verläuft.



Unterzieht man die Ecken *A*, *B*, *C*, *D* erst der Inversion und dann der Umkreisspiegelung, so reproduzieren sich die Ecken in zyklisch veränderter Reihenfolge *C*, *D*, *A*, *B*. Dabei muss der Steiner-Kreis auf sich abgebildet werden. Die Inversion überführt ihn in die Steiner-Gerade, die Umkreisspiegelung anschließend in einen Kreis durch die Umkreismitte. Daher geht der Steiner-Kreis durch die Umkreismitte und entsprechend die Steiner-Gerade durch den Diagonalenschnitt oder in anderer Interpretation: Steiner-

Kreis und Steiner-Gerade liegen spiegelbildlich zum Umkreis.

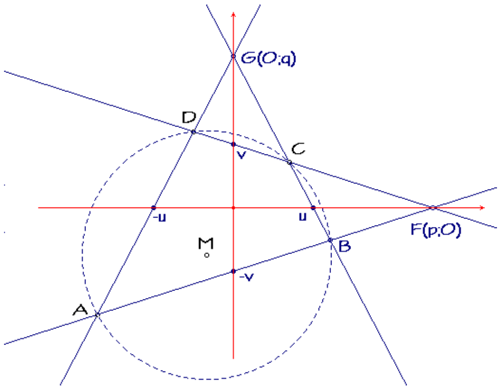
Satz 1. Alle Sehnen-Vierecke eines Kreises mit vorgegebenem Diagonalenschnitt haben den gleichen Steiner-Punkt im umkreis-gespiegelten Diagonalenschnitt. Die Steiner-Kreise verlaufen durch die Umkreismitte und die Steiner-Geraden durch den Diagonalenschnitt. Eine Spiegelung am Umkreis überführt den Steiner-Kreis in die Steiner-Gerade.

Wertet man die Zusammenhänge aus für einen Umkreisradius *r* und einen Diagonalenschnitt *E* mit dem Mittelpunktsabstand *e*, so erhält man für den Abstand des Steiner-Punktes und für den Radius *s* des Inversionskreises

$$MS = \frac{r^2}{e} \text{ und } s = \frac{r\sqrt{r^2 - e^2}}{e}.$$

Kartesische Koordinaten

Hier wird der Versuch gemacht, die geometrischen Zusammenhänge beim Sehnen-Viereck in kartesischen Koordinaten analytisch nachzuvollziehen und zu ergänzen.
Für ein Sehnen-Viereck schneiden sich die Winkelhalbierenden der Schnittwinkel der Gegenseiten orthogonal. Diese Winkelhalbierenden seien die Koordinatenachsen. Die Gegenseiten durch $F(p;0)$ mögen die y-Achsen-Abschitte $\pm v$ und die Gegenseiten durch $G(0;q)$ die x-Achsen-Abschitte $\pm u$ haben.



Dann errechnen sich die Ecken des Sehnen-Vierecks zu

$$A(-\frac{pu(q+v)}{pq-uv};-\frac{qv(p+u)}{pq-uv}),\ B(\frac{pu(q+v)}{pq+uv};-\frac{qv(p-u)}{pq+uv})$$

$$C(\frac{pu(q-v)}{pq-uv};\frac{qv(p-u)}{pq-uv}),\ D(-\frac{pu(q-v)}{pq+uv};\frac{qv(p+u)}{pq+uv}).$$

Weitere Ergebnisse:
Umkreismitte und Umkreisradius:

$$M(-\frac{pv^2(q^2+u^2)}{p^2q^2-u^2v^2};-\frac{qu^2(p^2+v^2)}{p^2q^2-u^2v^2}),$$

$$r=\frac{pq\sqrt{q^2+u^2}\,\sqrt{p^2+v^2}\,\sqrt{u^2+v^2}}{p^2q^2-u^2v^2}.$$

Diagonalenschnitt und Steiner-Punkt:

$$E\left(\frac{pu^2(q^2-v^2)}{p^2q^2-u^2v^2};\frac{qv^2(p^2-u^2)}{p^2q^2-u^2v^2}\right),$$

$$S\left(\frac{p^3(q^2+u^2)(q^2-v^2)}{(p^2+q^2)(p^2q^2-u^2v^2)};\frac{q^3(p^2-u^2)(p^2+v^2)}{(p^2+q^2)(p^2q^2-u^2v^2)}\right).$$

Höhenschnitte (die Teildreiseite *ABG*, *BCF*, *CDG*, *DAF* seien durch die Indizes *a*, *b*, *c*, *d* unterschieden):

$$H_{a,c}\left(\frac{pv(q^2-u^2)(\pm q+v)}{p^2q^2-u^2v^2};\frac{qu^2(p^2-v^2)\mp p^2v(q^2-u^2)}{p^2q^2-u^2v^2}\right),$$

$$H_{b,d}\left(\frac{pv^2(q^2-u^2)\pm q^2u(p^2-v^2)}{p^2q^2-u^2v^2};\frac{qu(p^2-v^2)(\mp p+u)}{p^2q^2-u^2v^2}\right).$$

Gleichung der Steiner-Geraden:

$$(p^2q^2-u^2v^2)(px+qy)=p^2q^2(u^2+v^2)-u^2v^2(p^2+q^2).$$

Umkreismitten:

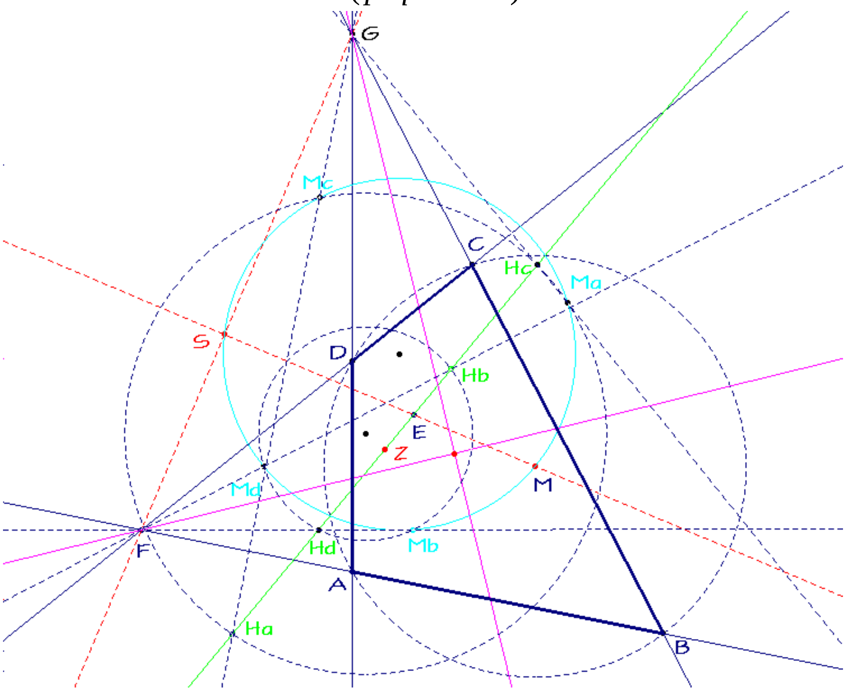
$$M_{a,c}\left(\frac{pv(\mp q-v)(q^2+u^2)}{2(p^2q^2-u^2v^2)};\frac{q(p^2q^2-u^2v^2)\mp p^2v(q^2+u^2)-qu^2(p^2+v^2)}{2(p^2q^2-u^2v^2)}\right),$$

$$M_{b,d}\left(\frac{p(p^2q^2-u^2v^2)-pv^2(q^2+u^2)\pm q^2u(p^2+v^2)}{2(p^2q^2-u^2v^2)};\frac{qu(\pm p-u)(p^2+v^2)}{2(p^2q^2-u^2v^2)}\right),$$

und die Gleichung des Steiner-Kreises:

$$\left(x-\frac{p(q^2+u^2)(p^2-3v^2)}{4(p^2q^2-u^2v^2)}\right)^2+\left(y-\frac{q(p^2+v^2)(q^2-3u^2)}{4(p^2q^2-u^2v^2)}\right)^2$$

$$=\frac{(p^2+q^2)(q^2+u^2)^2(p^2+v^2)^2}{16(p^2q^2-u^2v^2)^2}.$$



Mit diesen Ergebnissen lassen sich nicht nur die Zusammenhänge von Satz 1 bestätigen, sondern auch weitere unmittelbar nachrechnen:

Satz 2. **Die Höhenschnitte H_a und H_c sowie H_b und H_d liegen auf der Steiner-Geraden symmetrisch zum Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel des Sehnen-Vierecks. Die Umkreismitten M_a und M_c sowie M_b und M_d auf dem Steiner-Kreis liegen symmetrisch zur Mittelsenkrechten von Umkreismitte und Steiner-Punkt.**

Dabei ergibt sich für das Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel:

$$Z\left(\frac{pv^2(q^2-u^2)}{p^2q^2-u^2v^2};\frac{qu^2(p^2-v^2)}{p^2q^2-u^2v^2}\right).$$

Satz 3. **Die Höhenschnitte H_a, H_c und die Umkreismitten M_a, M_c sowie entsprechend die Höhenschnitte H_b, H_d und die Umkreismitten M_b, M_d liegen auf Kreisen mit dem gemeinsamen Mittelpunkt im Schnitt der Symmetrieachsen der Höhenschnitte und Umkreismitten.**

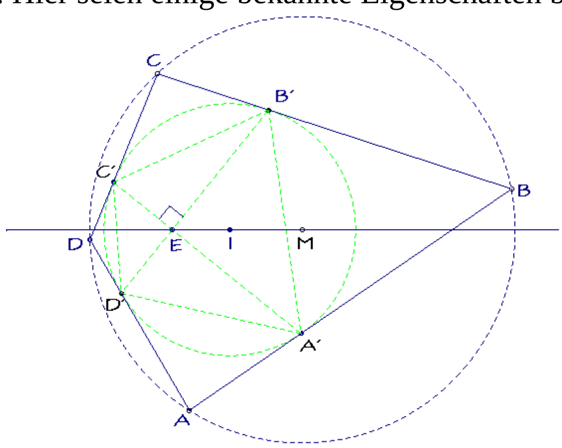
Mittelpunkt dieser konzentrischen Kreise ist

$$\left(\frac{p(p^2+v^2)(q^2-3u^2)}{4(p^2q^2-u^2v^2)};\frac{q(q^2+u^2)(p^2-3v^2)}{4(p^2q^2-u^2v^2)}\right).$$

Satz 4. **Die folgenden Punktetripel**
(F, H_b, M_d), (F, H_d, M_b), (G, H_a, M_c), (G, H_c, M_a) sind kollinear. Die Trägergeraden liegen symmetrisch zu den entsprechenden Winkelhalbierenden der Gegenseiten, ihre Schnittwinkel in F und G sind die Schnittwinkel der Gegenseiten in G und F.

Der Steiner-Punkt eines bizentrischen Vierecks

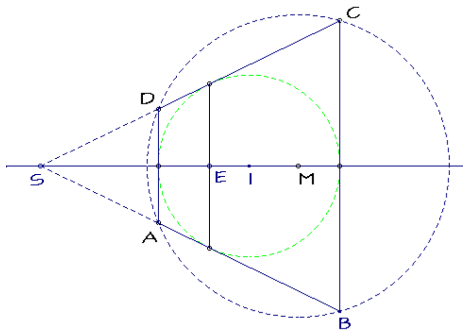
Bizentrische Vierecke, d.h. Vierecke, die zugleich Sehnen- und Tangenten-Viereck sind, wurden im 19. Jahrhundert vielfach untersucht. Hier seien einige bekannte Eigenschaften benannt.



Ein bizentrisches Viereck *ABCD* ist Tangenten-Viereck eines Sehnen-Vierecks *A´B´C´D´* mit orthogonalen Diagonalen (Poncelet 1822, [5] S.1000), dabei seien *A´*, *B´*, *C´ D´* die Berührpunkte der Seiten *AB*, *BC*, *CD*, *DA* mit dem Inkreis. Die Diagonalenschnitte von *ABCD* und *A´B´C´D´* fallen in einem Punkt *E* der Zentralen von In- und Umkreis zusammen. Dabei besteht zwischen dem Umkreisradius *r*, dem Inkreisradius ρ und dem Mittelpunktsabstand *d*=*MI* die Beziehung (Fuß 1798, [5] S.1001):

$$(r^2-d^2)^2 = 2\rho^2(r^2+d^2)\,.$$

Gibt man also den Umkreis mit einem Radius *r* vor und wählt eine Inkreismitte *I* im Abstand $d<r$, so liegt der Inkreisradius ρ fest. Alle bizentrischen Vierecke *ABCD* mit gleichem In- und Umkreis haben den selben Diagonalenschnitt *E* und damit den gleichen Steiner-Punkt *S*.



Aus dem Sonderfall eines Trapezes errechnen sich der Mittelpunktsabstand des Diagonalenschnitts und des Steiner-Punktes zu

$$ME = e = \frac{2dr^2}{r^2+d^2} \quad \text{und} \quad MS = \frac{d^2+r^2}{2d}\ .$$

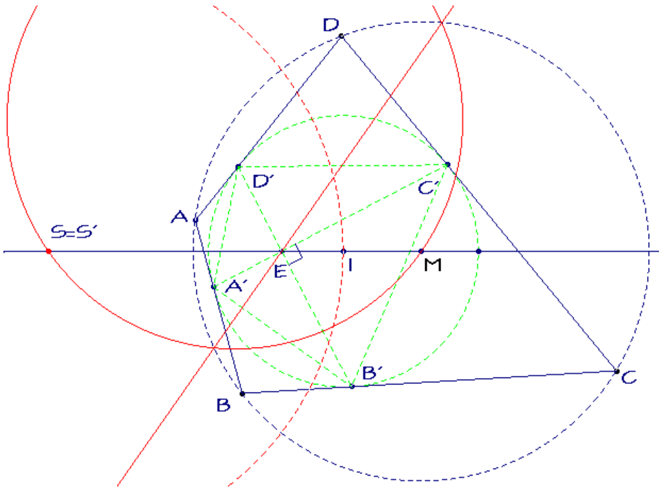
Daraus ergibt sich der Radius *s* des Inversionskreises

$$s = \frac{r^2-d^2}{2d}.$$

Das Viereck der Berührpunkte *A´B´C´D´* ist Sehnen-Viereck des Inkreises mit dem Mittelpunkt *I*, dem Radius ρ und dem Diagonalenschnitt *E* im Abstand $IE = e-d$. Der zugehörige Steiner-Punkt *S´* hat dann von der Inkreismitte den Abstand

$$IS' = \frac{r^2-d^2}{2d} = s = MS - d\,.$$

Damit fallen die Steiner-Punkte von *ABCD* und *A´B´C´D´* zusammen und der Inversionskreis von *ABCD* geht durch die Inkreismitte. Spiegelt man also den Diagonalenschnitt *E* am Umkreis oder am Inkreis, so erhält man in beiden Fällen den Steiner-Punkt des bizentrischen Vierecks. Spiegelt man die Inkreismitte am Umkreis, so ist der Mittelpunkt der Steiner-Punkt.



Satz 5: Ein bizentrisches Viereck und sein Berührviereck haben den gleichen Steiner-Punkt im Spiegelpunkt des Diagonalenschnitts am In- oder Umkreis. Spiegelt man die Inkreismitte am Umkreis, so ist der Steiner-Punkt der Mittelpunkt.

Für die analytische Berechnung eines bizentrischen Vierecks fällt der Ursprung des Koordinatensystems jetzt in die Inkreismitte *I*. Dann lassen sich *u* und *v* zugunsten des Inkreisradius ρ eliminieren:

$$u = \frac{q\rho}{\sqrt{q^2-\rho^2}} \quad , \quad v = \frac{p\rho}{\sqrt{p^2-\rho^2}} .$$

Für die betrachteten Punkte und ihre Abstände erhält man dann:

$$E(\frac{q\rho^2}{pq};\frac{p\rho^2}{pq}) \ , \ S(\frac{pq^2}{p^2+q^2};\frac{p^2q}{p^2+q^2}),$$

$$M(\frac{pq^2\rho^2}{-p^2q^2+p^2\rho^2+q^2\rho^2};\frac{p^2q\rho^2}{-p^2q^2+p^2\rho^2+q^2\rho^2})$$

$$\text{mit } r = \frac{pq\rho\sqrt{2p^2q^2-p^2\rho^2-q^2\rho^2}}{p^2q^2-p^2\rho^2-q^2\rho^2}$$

$$\text{und } d = \frac{pq\rho^2\sqrt{p^2+q^2}}{p^2q^2-p^2\rho^2-q^2\rho^2} .$$

Damit bestätigt man unmittelbar die oben zitierte Fußsche Gleichung

$$(r^2-d^2)^2 = 2\rho^2(r^2+d^2) .$$

Eine bemerkenswerte Eigenschaft ergibt sich für das Diagonalenprodukt

$$AC \cdot BD = \frac{4\rho^2(2p^2q^2-p^2\rho^2-q^2\rho^2)}{p^2q^2-p^2\rho^2-q^2\rho^2} = \frac{4r^2(r^2-d^2)}{r^2+d^2} .$$

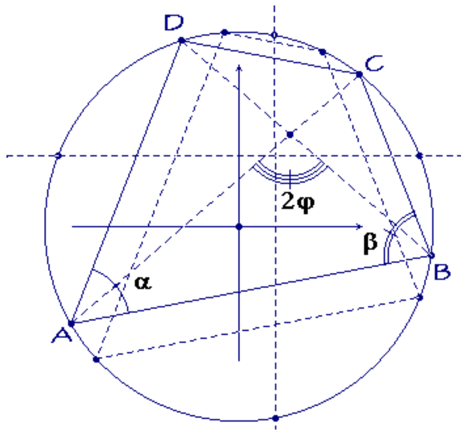
Satz 6. Alle bizentrischen Vierecke mit gleichem In- und Umkreis haben das gleiche Diagonalenprodukt.

Betrachtet man zu einem bizentrischen Viereck auch sein Berührviereck A´B´C´D´ mit den Ecken

$$A',C'\left(\frac{\rho^2}{p};\mp\frac{\rho\sqrt{p^2-\rho^2}}{p}\right),\quad B',D'\left(\pm\frac{\rho\sqrt{q^2-\rho^2}}{q};\frac{\rho^2}{q}\right),$$

so lassen sich neben der Übereinstimmung in Diagonalenschnitt und Steiner-Punkt weitere Zusammenhänge aufzeigen. Hier sei nur erwähnt, dass sich die Steiner-Geraden und die Steiner-Kreise beider Vierecke orthogonal schneiden und dass die Gegenseitenschnitte auf der Polaren des Diagonalenschnitts in harmonischer Lage sind.

Sehnen-Vierecke mit parallelen Seiten



Zu einem vorgegebenen Sehnen-Viereck lässt sich im gleichen Umkreis die Schar der Sehnen-Vierecke mit gleichen Innenwinkeln betrachten und die Ortslinie der zugehörigen Steiner-Punkte hinterfragen. Dazu sei ein Koordinatensystem mit Ursprung in der Umkreismitte benutzt, dessen Achsen parallel zu den Bogenmittendiagonalen verlaufen. Wählt man ein Sehnen-Viereck im Einheitskreis mit den Innenwinkeln $\alpha \le \beta \le 90°$ und bezeichnet den halben Diagonalen-Schnittwinkel mit φ, so haben die Eckpunkte folgende Koordinaten:

$$A(-\cos(\beta-\varphi);-\sin(\beta-\varphi)),\ B(\cos(\alpha-\varphi);-\sin(\alpha-\varphi)),$$
$$C(-\cos(\beta+\varphi);\sin(\beta+\varphi)),\ D(\cos(\alpha+\varphi);\sin(\alpha+\varphi)).$$

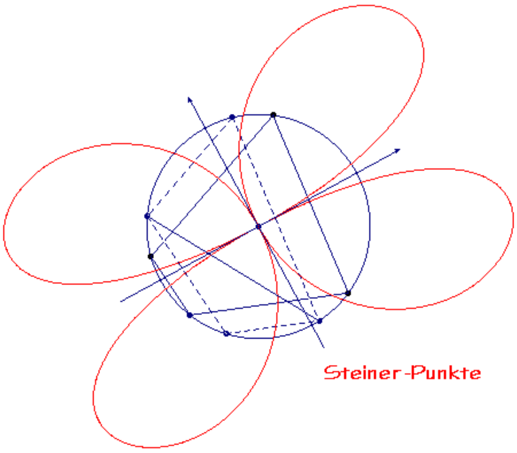
Damit errechnet sich der Diagonalenschnitt zu

$$E\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{2\cos\varphi};\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2\sin\varphi}\right).$$

Spiegelt man den Diagonalenschnitt am Umkreis, so erhält man den Steiner-Punkt. Trennt man sich jetzt vom Parameter φ, so gewinnt man die Gleichung der Ortskurve.

Satz 7. Im Einheitskreis mit vorgegebenem Sehnen-Viereck liegen die Steiner-Punkte aller winkelgleichen Sehnen-Vierecke auf einer Rosette mit der Gleichung:

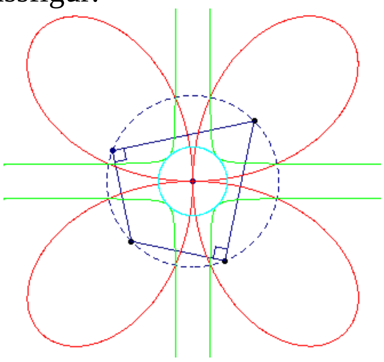
$$(x^2+y^2)^2[x^2(\cos\alpha+\cos\beta)^2+y^2(\cos\alpha-\cos\beta)^2]=4x^2y^2.$$



Für Sehnenvierecke mit einem Paar rechtwinkliger Gegenwinkel (z.B. $\beta = \delta = 90°$) wird die Rosette „quadratisch“ mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2)^3 \cos\alpha^2 = 4x^2 y^2 .$$

Nimmt man noch die Ortslinien der Diagonalenschnitte und der Zentren der gleichseitigen Umhyperbeln hinzu, ergibt sich eine „schöne“ Abschlussfigur.



Literatur

[1] J. W. Clawson: The complete quadrilateral.- Annals of Mathematics, 2, 20 (1919) 232-261.

[2] J. P. Ehrmann: Steiner`s Theorems on the Complete Quadrilateral. – Forum Geometricorum Vol. 4 (2004) 35-52.

[3] E. Schmidt: Vierecksbezogene Inversionen. – http://eckartschmidt.de.

[4] R. Stärk: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44, Jg 2002, S. 19.

[5] M. Zacharias: Elementargeometrie. – Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III 1, B.G. Teubner, Leipzig 1898-1904.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf

http://eckartschmidt.de

eckart_schmidt@t-online.de